CONTRÔLEUR DES FINANCES PUBLIQUES · ÉPREUVE N° 2 · OPTION QRC

Mathématiques

Une fiche méthode pour bien rédiger ses réponses, puis tout le programme de l'option en 10 fiches de deux pages : les formules, les exemples résolus pas à pas, les pièges, 50 exercices corrigés, puis les sujets officiels corrigés.

A · ARITHMÉTIQUE

- **MQ1** Multiples, diviseurs et nombres premiers
- **MQ2** Puissances, notation scientifique, conversions

B · ALGÈBRE

- **MQ3** Calcul littéral et racines carrées
- **MQ4** Équations et inéquations

C · FONCTIONS NUMÉRIQUES

- **MQ5** Fonctions usuelles et repère
- **MQ6** Dérivées et variations

D · STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

- **MQ7** Statistiques et ajustement linéaire
- **MQ8** Dénombrement et probabilités conditionnelles
- **MQ9** Variables aléatoires et loi binomiale

E · SUITES

- **MQ10** Suites arithmétiques et géométriques

ANNALES · SUJETS CORRIGÉS

- **A1** Le sujet 2026 corrigé
- **A2** Le sujet zéro corrigé

Ressource gratuite. Ce pack est diffusé bénévolement pour aider les candidats. Vous pouvez le partager librement ; il ne peut pas être vendu.

L'Essentiel Concours

Conforme au programme de l'arrêté du 1er juillet 2024.
Initiative indépendante : ce document n'est pas une publication officielle de la DGFiP.

Version 1.1 · novembre 2026

Licence CC BY-NC-ND 4.0 · L'Essentiel Concours

contact@lessentiel-concours.fr

Réussir une QRC de mathématiques

Montrer son raisonnement, justifier chaque étape, conclure par une phrase

Ce qu'est une QRC de maths. Un petit exercice, souvent en plusieurs questions. Le guide officiel est clair : **les calculs et le raisonnement doivent figurer sur la copie** quand un résultat chiffré est demandé. Un résultat juste sans justification rapporte peu ; une démarche juste avec une erreur de calcul rapporte une partie des points.

Le format réel. En 2026 comme dans le sujet zéro, **3 exercices** de plusieurs questions, à traiter dans l'ordre de votre choix, sans limite de lignes. Rédigez complètement, sans détour. Les deux sujets sont corrigés dans les fiches A1 et A2.

Le temps. Notre conseil : bouclez le QCM en 45 minutes et gardez **1 h 15** pour les 3 exercices, soit environ **25 minutes par exercice**, relecture comprise. Le guide prévoit au moins une heure : rédiger prend du temps.

À savoir : le barème détaillé des QRC n'est pas publié. Les autres repères de cette fiche sont des conseils de préparation.

1 · La rédaction attendue, en quatre temps

Annoncer

Nommez ce que vous cherchez et l'outil que vous utilisez : « On cherche le PGCD de 84 et 360 ; on décompose en facteurs premiers. »

Poser le calcul

Écrivez la formule, puis remplacez par les valeurs : « a = (9 − 3) ÷ (4 − 1) = 2 ».

Donner le résultat

Valeur exacte d'abord (2/7, $\sqrt{5}$), valeur approchée ensuite si on la demande, avec son unité.

Conclure par une phrase

Répondez à la question posée, dans ses mots : « Le fleuriste peut faire 12 bouquets. »

2 · Justifier avec les bons mots

Pour…	Écrivez par exemple
Une loi binomiale	« On répète 5 fois, de façon indépendante, la même épreuve à deux issues ; X compte les succès : X suit B(5 ; 0,3). »
Des variations	« f′(x) > 0 sur]2 ; +∞[, donc f est croissante sur cet intervalle. »
Une suite	« On multiplie par 0,98 à chaque étape : la suite est géométrique de raison 0,98. »
Une équation	« Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. »

3 · Vérifier avant de passer à la suite

Remplacez la solution dans l'équation de départ. **Estimez** l'ordre de grandeur : une probabilité est entre 0 et 1, un prix ne devient pas négatif. **Contrôlez** une factorisation en redéveloppant. Ces vérifications prennent quelques secondes et sauvent des points.

La calculatrice. Vérifiez sur votre convocation si elle est autorisée, et entraînez-vous aussi à poser les calculs simples à la main : fractions, puissances, pourcentages.

Exemple 1 · résoudre une inéquation

Résolvez $-3x + 9 \geq 2x - 1$.

RÉPONSE INSUFFISANTE

« $x \geq 2$ »

Résultat sans démarche, et faux : le sens de l'inégalité n'a pas été inversé en divisant par un nombre négatif.

RÉPONSE ATTENDUE

$-3x - 2x \geq -1 - 9$, soit $-5x \geq -10$.

On divise par -5, nombre négatif : le sens de l'inégalité change, donc $x \leq 2$.

L'ensemble des solutions est $\mathbf{S =]-\infty ; 2]}$.

Chaque étape est écrite, la règle du changement de sens est citée, la conclusion donne l'ensemble des solutions.

Exemple 2 · un arbre de probabilités

60 % des pièces viennent de la machine A, dont 2 % sont défectueuses ; les autres viennent de B, dont 5 % sont défectueuses. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse ?

RÉPONSE INSUFFISANTE

« 2 % + 5 % = 7 %. »

Les deux taux ne s'additionnent pas : ils ne portent pas sur la même population. Il faut les pondérer par la part de chaque machine.

RÉPONSE ATTENDUE

On note A, B et D les événements « la pièce vient de A », « de B », « est défectueuse ».

D'après la formule des probabilités totales : $P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) = 0{,}6 \times 0{,}02 + 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}012 + 0{,}02 = 0{,}032$.

La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est de **0,032**, soit 3,2 %.

Événements nommés, formule citée, calcul posé, phrase de conclusion.

Avant de rendre, vérifiez : chaque réponse porte son numéro · chaque calcul montre sa formule · chaque résultat a sa valeur exacte, son arrondi demandé et son unité · une phrase répond à chaque question · les solutions ont été vérifiées · aucune question n'est laissée blanche : une démarche juste rapporte des points même sans résultat final.

Multiples, diviseurs et nombres premiers

Divisibilité, décomposition en facteurs premiers, PGCD, PPCM et division euclidienne

Multiple et diviseur. a est un **multiple** de b, et b un **diviseur** de a, s'il existe un entier k tel que a = b × k. Ainsi 36 = 4 × 9 : 36 est un multiple de 4, et 4 un diviseur de 36.

Nombre premier. Un entier qui a exactement deux diviseurs, 1 et lui-même : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29… 1 n'est pas premier ; 2 est le seul premier pair.

Division euclidienne. Pour deux entiers a et b (b ≠ 0), il existe un quotient q et un reste r uniques tels que a = b × q + r, avec 0 ≤ r < b. Exemple : 2 026 = 7 × 289 + 3.

Divisible par	Critère	Exemple
2	Le chiffre des unités est pair	1 358
3	La somme des chiffres est divisible par 3	1 233 : 1 + 2 + 3 + 3 = 9
4	Le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4	2 024 : 24
5	Le chiffre des unités est 0 ou 5	745
9	La somme des chiffres est divisible par 9	1 233
10	Le chiffre des unités est 0	2 030

Décomposer pour calculer PGCD et PPCM

Tout entier supérieur à 1 s'écrit de façon unique comme un **produit de facteurs premiers**. On divise par 2 tant que c'est possible, puis par 3, 5, 7…

PGCD (plus grand commun diviseur) : le produit des facteurs **communs**, chacun avec le plus petit exposant. **PPCM** (plus petit commun multiple) : le produit de **tous** les facteurs, chacun avec le plus grand exposant. Contrôle : PGCD × PPCM = a × b.

PGCD et PPCM de 360 et 84

Décomposer, puis comparer les exposants.

360 = $2^3 \times 3^2 \times 5$; 84 = $2^2 \times 3 \times 7$
PGCD = $2^2 \times 3$ = **12**
PPCM = $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ = **2 520**
Contrôle : 12 × 2 520 = 30 240 = 360 × 84

Simplifier une fraction

Rendre 84/360 irréductible.

On divise par le PGCD, 12 :
84 ÷ 12 = 7 ; 360 ÷ 12 = 30
84/360 = **7/30**, irréductible car 7 et 30 n'ont aucun diviseur commun autre que 1

Un problème type

Un fleuriste a 84 roses et 360 tulipes. Il veut faire le plus grand nombre possible de bouquets identiques, en utilisant toutes les fleurs.

Le nombre de bouquets divise 84 et 360 : c'est leur PGCD, **12 bouquets**.
Chaque bouquet contient 84 ÷ 12 = **7 roses** et 360 ÷ 12 = **30 tulipes**.

Le bon réflexe · « Le plus grand nombre de parts identiques » appelle le PGCD ; « la prochaine fois que deux événements coïncident » appelle le PPCM.

Les pièges classiques

Dire que 1 est premier : il n'a qu'un seul diviseur ; la liste commence à 2.

Prendre le plus grand exposant pour le PGCD : c'est le plus petit, et seulement pour les facteurs communs.

Oublier la condition sur le reste : dans une division euclidienne, le reste est toujours strictement inférieur au diviseur.

Confondre PGCD et PPCM dans un problème : partager équitablement, c'est le PGCD ; faire coïncider des cycles, c'est le PPCM.

Entraînez-vous : 5 QRC · calculs et raisonnement rédigés

1. Décomposez 1 260 en produit de facteurs premiers.

2. Calculez le PGCD de 1 260 et 360, puis rendez la fraction 360/1 260 irréductible.

3. Effectuez la division euclidienne de 500 par 23.

4. Deux bus partent ensemble à 8 h. L'un repasse toutes les 12 minutes, l'autre toutes les 18 minutes. Quand repartiront-ils ensemble ?

5. Montrez que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

Corrigés détaillés

1. $1\,260 = 2 \times 630 = 2^2 \times 315 = 2^2 \times 3 \times 105 = 2^2 \times 3^2 \times 35 =$ **$2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$**.

2. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Facteurs communs avec le plus petit exposant : $2^2 \times 3^2 \times 5 =$ **180**. Donc $360/1\,260 = (360 \div 180)/(1\,260 \div 180) =$ **2/7**.

3. $23 \times 21 = 483$ et $23 \times 22 = 506 > 500$. Donc $500 = 23 \times$ **21** + **17**, avec $0 \leq 17 < 23$: le quotient est 21 et le reste 17.

4. On cherche le plus petit multiple commun : $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$, donc PPCM $= 2^2 \times 3^2 = 36$. Ils repartiront ensemble **36 minutes** plus tard, à **8 h 36**.

5. Trois entiers consécutifs s'écrivent n, n + 1 et n + 2. Leur somme vaut $3n + 3 =$ **$3(n + 1)$**, avec n + 1 entier : c'est donc un multiple de 3.

Les formules à retenir

Division euclidienne	$a = b \times q + r$, avec $0 \leq r < b$
Contrôle	$\text{PGCD}(a ; b) \times \text{PPCM}(a ; b) = a \times b$
Fraction irréductible	Numérateur et dénominateur divisés par leur PGCD

Puissances, notation scientifique, conversions

Les règles de calcul sur les puissances, les unités et les échelles

Règle sur les puissances	Exemple
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$2^3 \times 2^4 = 2^7 = 128$
$a^m \div a^n = a^{m-n}$	$10^5 \div 10^2 = 10^3$
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$(3^2)^3 = 3^6 = 729$
$(a \times b)^n = a^n \times b^n$	$(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3 = 1\,000$
$a^0 = 1$ et $a^{-n} = 1/a^n$ $(a \neq 0)$	$5^0 = 1$; $2^{-3} = 1/8 = 0{,}125$

La notation scientifique écrit un nombre sous la forme $a \times 10^n$, avec **$1 \leq a < 10$** et n entier. Exemples : 45 200 = $4{,}52 \times 10^4$; 0,000 452 = $4{,}52 \times 10^{-4}$. Elle permet de comparer et de multiplier très vite de très grands ou très petits nombres.

Simplifier

Calculer $(2^3 \times 2^{-5}) \div 2^{-4}$.

Exposant : $3 + (-5) - (-4) = 2$
Résultat : 2^2 = **4**

Multiplier en notation scientifique

Calculer $(3 \times 10^5) \times (4 \times 10^{-2})$.

$3 \times 4 = 12$ et $10^5 \times 10^{-2} = 10^3$
12×10^3 = **$1{,}2 \times 10^4$**

Les conversions d'unités

Grandeur	Rapport entre deux unités voisines	Repères
Longueur, masse	× 10 (km, hm, dam, m, dm, cm, mm)	1 km = 1 000 m ; 1 t = 1 000 kg
Aire	× 100 (km^2, hm^2, dam^2, m^2, dm^2, cm^2)	1 m^2 = 10 000 cm^2 ; 1 ha = 10 000 m^2
Volume	× 1 000 (m^3, dm^3, cm^3)	1 dm^3 = 1 L ; 1 m^3 = 1 000 L
Durée	Base 60	1,5 h = 1 h 30 min ; 2,25 h = 2 h 15 min
Vitesse	km/h ÷ 3,6 = m/s	90 km/h = 25 m/s

Préfixe	giga	méga	kilo	milli	micro	nano
Puissance	10^9	10^6	10^3	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

Les échelles

Une échelle de **1/25 000** signifie que 1 cm sur la carte représente 25 000 cm, soit 250 m, dans la réalité. Distance réelle = distance sur la carte × dénominateur ; distance sur la carte = distance réelle ÷ dénominateur. On convertit toujours dans la **même unité** avant de calculer.

Le bon réflexe · Pour une vitesse, une durée ou une échelle, écrivez d'abord toutes les grandeurs dans des unités compatibles : la moitié des erreurs vient d'une conversion oubliée.

Les pièges classiques

Additionner les exposants d'une somme : $2^3 + 2^4$ n'est pas 2^7 ; seules les multiplications de même base s'additionnent en exposant.

Écrire 12×10^3 comme notation scientifique : la mantisse doit être comprise entre 1 et 10 : $1{,}2 \times 10^4$.

Convertir les aires de 10 en 10 : 1 m² = 100 dm², pas 10.

Lire 1,5 h comme 1 h 50 : 0,5 h = 30 min ; on multiplie la partie décimale par 60.

Entraînez-vous : 5 QRC · calculs et raisonnement rédigés

1. Simplifiez $A = (5^4 \times 5^{-2}) \div 5^3$ et donnez sa valeur décimale.

2. Écrivez $B = (6 \times 10^4) \times (5 \times 10^{-7})$ en notation scientifique.

3. Convertissez 2,5 m³ en litres et 3 500 cm² en m².

4. Une voiture parcourt 150 km en 1 h 40 min. Calculez sa vitesse moyenne en km/h puis en m/s.

5. Sur une carte au 1/50 000, deux villages sont distants de 6,4 cm. Quelle est la distance réelle ?

Corrigés détaillés

1. Exposant : 4 − 2 − 3 = −1. $A = 5^{-1} = 1/5 =$ **0,2**.

2. $6 \times 5 = 30$ et $10^4 \times 10^{-7} = 10^{-3}$. $B = 30 \times 10^{-3} = 3 \times 10^1 \times 10^{-3} =$ **3×10^{-2}**.

3. 1 m³ = 1 000 L, donc 2,5 m³ = **2 500 L**. 1 m² = 10 000 cm², donc 3 500 cm² = 3 500 ÷ 10 000 = **0,35 m²**.

4. 1 h 40 min = 1 + 40/60 = 5/3 h. v = 150 ÷ 5/3 = 150 × 3/5 = **90 km/h**, soit 90 ÷ 3,6 = **25 m/s**.

5. 6,4 × 50 000 = 320 000 cm = 3 200 m = **3,2 km**. Inversement, 4 km réels feraient 400 000 ÷ 50 000 = 8 cm sur la carte.

Les formules à retenir

Notation scientifique	$a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$
Vitesse	v = d ÷ t ; d = v × t ; t = d ÷ v
Échelle	distance sur la carte ÷ distance réelle, dans la même unité

Calcul littéral et racines carrées

Développer, factoriser, utiliser les identités remarquables et simplifier des racines

Les ensembles de nombres. $\mathbb{N}$ (entiers naturels : 0, 1, 2…) ⊂ $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs : −3, 0, 5) ⊂ $\mathbb{D}$ (décimaux : 2,75) ⊂ $\mathbb{Q}$ (rationnels, quotients d'entiers : 1/3) ⊂ $\mathbb{R}$ (réels, dont $\sqrt{2}$ et π, qui sont irrationnels).

Développer transforme un produit en somme ; **factoriser** transforme une somme en produit. Distributivité : $k(a + b) = ka + kb$; $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Identité remarquable	Exemple de développement	Exemple de factorisation
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$	$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$	$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$	$9x^2 - 25 = (3x - 5)(3x + 5)$

Factoriser : trois méthodes, dans cet ordre

1. Un facteur commun. $(x + 1)(2x - 3) - (x + 1)(x + 4) = (x + 1)[(2x - 3) - (x + 4)] =$ **$(x + 1)(x - 7)$**. Attention aux parenthèses quand on soustrait.

2. Une identité remarquable, en reconnaissant un carré parfait ou une différence de deux carrés : $4x^2 - 49 = (2x)^2 - 7^2 = (2x - 7)(2x + 7)$.

3. Faire apparaître un facteur commun en réécrivant : $3x - 6 = 3(x - 2)$, puis réutiliser ce facteur.

Les racines carrées

Règle ($a \geq 0$, $b > 0$)	Exemple
$\sqrt{(a \times b)} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$	$\sqrt{72} = \sqrt{(36 \times 2)} = 6\sqrt{2}$
$\sqrt{(a \div b)} = \sqrt{a} \div \sqrt{b}$	$\sqrt{(9/16)} = 3/4$
$(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{(a^2)} = a$	$(\sqrt{7})^2 = 7$
$\sqrt{(a + b)} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{(9 + 16)} = 5$, alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$

Rendre un dénominateur rationnel

Supprimer la racine au dénominateur de $1/\sqrt{2}$ et de $1/(\sqrt{5} - 2)$.

$1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/(\sqrt{2} \times \sqrt{2}) =$ **$\sqrt{2}/2$**

On multiplie par l'expression conjuguée : $1/(\sqrt{5} - 2) = (\sqrt{5} + 2)/[(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)] = (\sqrt{5} + 2)/(5 - 4) =$ **$\sqrt{5} + 2$**

Le bon réflexe · Vérifiez une factorisation en la redéveloppant mentalement, ou en remplaçant x par une valeur simple (x = 1) dans les deux écritures : elles doivent donner le même nombre.

Les pièges classiques

Écrire $(a + b)^2 = a^2 + b^2$: il manque le double produit 2ab.

Oublier de changer les signes en soustrayant une parenthèse : $-(x + 4) = -x - 4$.

Additionner des racines : $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ne se simplifie pas ; seuls les termes en $\sqrt{2}$ s'additionnent entre eux ($3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$).

Croire que $\sqrt{(x^2)} = x$ pour tout x : $\sqrt{((-3)^2)} = \sqrt{9} = 3$: c'est la valeur absolue de x.

Entraînez-vous : 5 QRC · calculs et raisonnement rédigés

1. Développez et réduisez $A = (3x + 2)^2 - (x - 1)(x + 1)$.

2. Factorisez $B = x^2 - 6x + 9$.

3. Factorisez $C = (2x + 1)^2 - 16$.

4. Écrivez $D = \sqrt{50} + 3\sqrt{8} - \sqrt{18}$ sous la forme $a\sqrt{2}$.

5. Calculez astucieusement $101^2 - 99^2$.

Corrigés détaillés

1. $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$ et $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$. $A = 9x^2 + 12x + 4 - x^2 + 1 =$ **$8x^2 + 12x + 5$**.

2. On reconnaît $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 3$: $B =$ **$(x - 3)^2$**.

3. C'est une différence de deux carrés : $(2x + 1)^2 - 4^2 = (2x + 1 - 4)(2x + 1 + 4) =$ **$(2x - 3)(2x + 5)$**.

4. $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$; $3\sqrt{8} = 3 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$; $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. $D = 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} =$ **$8\sqrt{2}$**.

5. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$: $101^2 - 99^2 = (101 - 99)(101 + 99) = 2 \times 200 =$ **400**.

Les formules à retenir

Développer	Transformer un produit en somme
Factoriser	Transformer une somme en produit
Expression conjuguée	Celle de $a - \sqrt{b}$ est $a + \sqrt{b}$: leur produit n'a plus de racine
Racine d'un carré	$\sqrt{(x^2)} = \lvert x \rvert$, la valeur absolue de x
Différence de deux carrés	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Équations et inéquations

Premier degré, produit nul, second degré factorisé, tableaux de signes et mise en équation

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui rendent l'égalité vraie. On peut ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres, et les multiplier ou diviser par un même nombre **non nul**.

Dans une inéquation, les mêmes règles s'appliquent, sauf une : multiplier ou diviser par un nombre **négatif inverse le sens** de l'inégalité. L'ensemble des solutions est un intervalle.

Équation du premier degré

Résoudre $3x - 7 = 5x + 1$.

$3x - 5x = 1 + 7$
$-2x = 8$, donc $x = \mathbf{-4}$
Vérification : $3 \times (-4) - 7 = -19$ et $5 \times (-4) + 1 = -19$

Inéquation

Résoudre $-2x + 6 > 0$.

$-2x > -6$
On divise par -2 : le sens change
$x < 3$: $S = \mathbf{]-\infty\ ;\ 3[}$

Équation produit nul et second degré factorisé

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. $(x - 2)(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1/3$. Il faut donc d'abord **factoriser** et tout ramener d'un seul côté du signe égal.

L'équation $x^2 = k$ a deux solutions $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$ si $k > 0$, une seule (0) si $k = 0$, aucune si $k < 0$. Exemple : $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -4$.

Le tableau de signes

Le signe de $ax + b$ est celui de **a à droite de sa racine** $-b/a$, et l'opposé à gauche. Pour un produit, on étudie chaque facteur sur une ligne, puis on applique la règle des signes. Exemple : $(x - 2)(x + 3) \leq 0$.

x	$-\infty$ … −3	−3 … 2	2 … $+\infty$
x + 3	−	+	+
x − 2	−	−	+
Produit	+	−	+

Le produit est négatif ou nul entre les racines : $S = [-3\ ;\ 2]$, crochets fermés car l'inégalité est large.

Mettre un problème en équation

Après une hausse de 20 %, un article coûte 54 €. Quel était son prix initial ?

On pose x le prix initial. Une hausse de 20 % multiplie par 1,2 : $1{,}2x = 54$
$x = 54 \div 1{,}2 = \mathbf{45\ €}$. Vérification : $45 \times 1{,}2 = 54$

Les pièges classiques

Oublier d'inverser le sens : en divisant par un nombre négatif, < devient >.

Diviser par x : on perd la solution x = 0 ; on factorise plutôt.

Appliquer le produit nul sans zéro d'un côté : (x − 1)(x + 2) = 5 ne se résout pas ainsi.

Mal fermer les crochets : une inégalité stricte exclut la borne ; l'infini est toujours exclu.

Entraînez-vous : 5 QRC · calculs et raisonnement rédigés

1. Résolvez 4(x − 3) = 2x + 5.

2. Résolvez −3x + 9 ≥ 2x − 1.

3. Résolvez (2x − 5)(x + 4) = 0.

4. Résolvez (x + 1)(x − 5) < 0.

5. Un rectangle a un périmètre de 46 cm ; sa longueur dépasse sa largeur de 7 cm. Calculez ses dimensions.

Corrigés détaillés

1. 4x − 12 = 2x + 5, donc 2x = 17 et **x = 8,5**. Vérification : 4 × 5,5 = 22 et 2 × 8,5 + 5 = 22.

2. −5x ≥ −10. En divisant par −5, le sens change : x ≤ 2. S = **]−∞ ; 2]**.

3. Un produit est nul si l'un de ses facteurs l'est : 2x − 5 = 0 ou x + 4 = 0. S = **{−4 ; 5/2}**.

4. Racines : −1 et 5. Chaque facteur est positif à droite de sa racine ; le produit est négatif entre les racines. S = **]−1 ; 5[**.

5. Soit l la largeur : 2(l + l + 7) = 46, donc 4l + 14 = 46 et l = 8. Largeur **8 cm**, longueur **15 cm**. Vérification : 2 × (8 + 15) = 46.

Les formules à retenir

Produit nul	A × B = 0 ⟺ A = 0 ou B = 0
Racine de ax + b	x = −b/a ; signe de a à sa droite
$x^2 = k$ (k > 0)	x = √k ou x = −√k
Inéquation	× ou ÷ par un nombre négatif : le sens change
Intervalle	Crochet tourné vers la borne : borne incluse ; l'infini est toujours exclu

Fonctions usuelles et repère

Image, antécédent, fonctions affines et de référence, calculs dans un repère orthonormé

Une fonction f associe à chaque nombre x de son **ensemble de définition** un unique nombre f(x), son **image**. Si f(a) = b, a est **un antécédent** de b (il peut y en avoir plusieurs, ou aucun). La **courbe** de f est l'ensemble des points (x ; f(x)) dans un repère.

Les fonctions affines

f(x) = ax + b. Sa courbe est une **droite** ; a est le **coefficient directeur**, b l'**ordonnée à l'origine**. Pour deux points de la droite : $a = (f(x_2) - f(x_1)) \div (x_2 - x_1)$. f est croissante si a > 0, décroissante si a < 0, constante si a = 0. Si b = 0, f est **linéaire** : elle traduit une situation de proportionnalité.

Trouver une fonction affine

Déterminer f affine dont la droite passe par A(1 ; 3) et B(4 ; 9).

$a = (9 - 3) \div (4 - 1) = 2$
$f(1) = 3$, donc $2 \times 1 + b = 3$ et $b = 1$
$f(x) = \mathbf{2x + 1}$

Les fonctions de référence

Fonction	Définie sur	Variations	Courbe et propriété
Carré : x^2	$\mathbb{R}$	Décroissante sur $]-\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$	Parabole ; paire : $f(-x) = f(x)$
Inverse : 1/x	$\mathbb{R}$ privé de 0	Décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$	Hyperbole ; impaire
Racine : $\sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	Croissante	Demi-parabole couchée
Cube : x^3	$\mathbb{R}$	Croissante	Impaire : $f(-x) = -f(x)$

Comparer avec les variations. Une fonction croissante conserve l'ordre, une fonction décroissante l'inverse. Comme x^2 est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et que $-3{,}1 < -2{,}7$, on a $(-3{,}1)^2 > (-2{,}7)^2$.

Calculer dans un repère orthonormé

Calcul	Formule	Exemple : A(1 ; 3), B(4 ; 7)
Milieu de [AB]	$((x_A + x_B)/2 ; (y_A + y_B)/2)$	(2,5 ; 5)
Distance AB	$\sqrt{((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2)}$	$\sqrt{(3^2 + 4^2)} = \sqrt{25} = 5$

Le bon réflexe · Un ensemble de définition se trouve en repérant les interdits : un dénominateur ne s'annule pas, ce qui est sous une racine carrée est positif ou nul.

Les pièges classiques

Confondre image et antécédent : l'image se calcule (f(a)) ; l'antécédent se trouve en résolvant f(x) = b.

Dire que l'inverse est décroissante sur $\mathbb{R}$: elle l'est sur chacun des deux intervalles séparément : $-1 < 1$, et leurs inverses vérifient encore $-1 < 1$.

Oublier le repère orthonormé : la formule de distance n'est valable que si les axes sont perpendiculaires et de même unité.

Inverser l'ordre des différences : $a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, avec les mêmes points dans le même ordre en haut et en bas.

Entraînez-vous : 5 QRC · calculs et raisonnement rédigés

1. Soit f(x) = −3x + 4. Calculez l'image de −2 et l'antécédent de 1.

2. Déterminez la fonction affine g telle que g(2) = 5 et g(6) = −3.

3. Dans un repère orthonormé, A(−1 ; 2) et B(3 ; 5). Calculez AB et les coordonnées du milieu de [AB].

4. Sans calculatrice, comparez $(-3{,}1)^2$ et $(-2{,}7)^2$.

5. Donnez l'ensemble de définition de $h(x) = \sqrt{(x - 3)}$ et de $k(x) = 1/(x + 2)$.

Corrigés détaillés

1. f(−2) = −3 × (−2) + 4 = **10**. On résout −3x + 4 = 1 : −3x = −3, donc l'antécédent de 1 est **x = 1**.

2. a = (−3 − 5) ÷ (6 − 2) = −2. g(2) = 5 donne −4 + b = 5, donc b = 9. **g(x) = −2x + 9**, fonction décroissante.

3. $AB = \sqrt{((3 + 1)^2 + (5 - 2)^2)} = \sqrt{(16 + 9)} = \mathbf{5}$. Milieu : ((−1 + 3)/2 ; (2 + 5)/2) = **(1 ; 3,5)**.

4. Les deux nombres sont négatifs et $-3{,}1 < -2{,}7$. La fonction carré est **décroissante** sur $]-\infty ; 0]$: elle inverse l'ordre. Donc $\mathbf{(-3{,}1)^2 > (-2{,}7)^2}$.

5. Pour h, il faut $x - 3 \geq 0$: $D_h = \mathbf{[3 ; +\infty[}$. Pour k, il faut $x + 2 \neq 0$: $D_k = \mathbb{R}$ **privé de −2**.

Les formules à retenir

Coefficient directeur	$a = (y_2 - y_1) \div (x_2 - x_1)$
Distance	$AB = \sqrt{((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2)}$
Milieu	$((x_A + x_B)/2 ; (y_A + y_B)/2)$

Dérivées et variations

Nombre dérivé, tangente, formules de dérivation, tableau de variations et optimisation

Le nombre dérivé f′(a) est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a. Équation de cette tangente : **y = f′(a)(x − a) + f(a)**.

Le lien avec les variations. Si f′(x) > 0 sur un intervalle, f y est croissante ; si f′(x) < 0, décroissante. Quand f′ s'annule **en changeant de signe**, f atteint un maximum ou un minimum local.

f(x)	f′(x)
k (constante)	0
x	1
x^2	2x
x^n	$n\,x^{n-1}$
1/x	$-1/x^2$
√x	$1/(2\sqrt{x})$

Opération	Dérivée
u + v	u′ + v′
k × u	k × u′
u × v	u′v + uv′
u ÷ v	(u′v − uv′) ÷ v^2
ax + b	a

Étudier les variations : la méthode

Exemple complet

Étudier les variations de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Dériver : $f'(x) = 3x^2 - 6x$
2. Factoriser : $f'(x) = 3x(x - 2)$, qui s'annule en 0 et en 2
3. Signe : f′ > 0 sur $]-\infty ; 0[$, f′ < 0 sur $]0 ; 2[$, f′ > 0 sur $]2 ; +\infty[$
4. Conclure : f croît, puis décroît, puis croît. Maximum local f(0) = **1** ; minimum local f(2) = 8 − 12 + 1 = **−3**

x	−∞		0		2	+∞
Signe de f′(x)		+	0	−	0	+
Variations de f		↗	1	↘	−3	↗

f croît jusqu'à son maximum local 1 (en x = 0), décroît jusqu'à son minimum local −3 (en x = 2), puis croît.

L'optimisation, application la plus fréquente

Maximiser un bénéfice

Le bénéfice d'une entreprise, en euros, pour q articles vendus est $B(q) = -2q^2 + 80q - 300$, avec q entre 0 et 40.

B′(q) = −4q + 80, qui s'annule pour q = 20
B′ > 0 avant 20, B′ < 0 après : B est maximal en q = 20
B(20) = −800 + 1 600 − 300 = **500 €** pour **20 articles**

Les pièges classiques

Conclure sur le signe de f au lieu de celui de f′ : ce sont les signes de la dérivée qui donnent les variations.

Croire qu'une dérivée nulle donne toujours un extremum : x^3 a une dérivée nulle en 0 sans changer de sens de variation.

Dériver un produit terme à terme : $(uv)' = u'v + uv'$, pas $u'v'$.

Oublier de calculer la valeur de l'extremum : la question demande souvent le bénéfice maximal, pas seulement la quantité.

Entraînez-vous : 5 QRC · calculs et raisonnement rédigés

1. Dérivez $f(x) = 5x^3 - 2x + 7$.

2. Dérivez $g(x) = (2x + 1)(x - 3)$.

3. Donnez l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^2$ au point d'abscisse 3.

4. Étudiez les variations de $h(x) = x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

5. Le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, est $B(q) = -q^2 + 60q - 500$ pour q tonnes produites. Quelle production maximise le bénéfice ?

Corrigés détaillés

1. $f'(x) = 5 \times 3x^2 - 2 + 0 =$ **$15x^2 - 2$**.

2. Avec $u = 2x + 1$ ($u' = 2$) et $v = x - 3$ ($v' = 1$) : $g'(x) = 2(x - 3) + (2x + 1) \times 1 =$ **$4x - 5$**. Contrôle : $g(x) = 2x^2 - 5x - 3$, dont la dérivée est bien $4x - 5$.

3. $f(3) = 9$ et $f'(x) = 2x$, donc $f'(3) = 6$. $y = 6(x - 3) + 9$, soit **$y = 6x - 9$**.

4. $h'(x) = 2x - 4$, nulle en $x = 2$, négative avant et positive après. h est **décroissante sur $]-\infty ; 2]$** puis **croissante sur $[2 ; +\infty[$**, avec un minimum $h(2) = 4 - 8 + 1 =$ **-3**.

5. $B'(q) = -2q + 60$, nulle pour $q = 30$, positive avant et négative après : B est maximal en $q = 30$. $B(30) = -900 + 1\,800 - 500 = 400$. Il faut produire **30 tonnes**, pour un bénéfice de **400 000 €**.

Les formules à retenir

Tangente en a	$y = f'(a)(x - a) + f(a)$
Produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Quotient	$(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$

Statistiques descriptives et ajustement

Moyenne, médiane, quartiles, écart-type, puis droite d'ajustement d'un nuage de points

Indicateur	Définition	Ce qu'il mesure
Moyenne $\bar{x}$	Somme des valeurs ÷ effectif ; pondérée : $\Sigma n_i x_i \div N$	La valeur centrale, sensible aux valeurs extrêmes
Médiane	Valeur qui partage la série ordonnée en deux moitiés	La valeur centrale, insensible aux extrêmes
Quartiles Q_1 et Q_3	Plus petites valeurs telles qu'au moins 25 % (Q_1) ou 75 % (Q_3) des valeurs leur soient inférieures ou égales	Les bornes des 50 % centraux
Étendue ; écart interquartile	Max − min ; $Q_3 - Q_1$	La dispersion
Variance V ; écart-type σ	V = moyenne des carrés des écarts à la moyenne ; $\sigma = \sqrt{V}$	La dispersion autour de la moyenne

Moyenne, variance, écart-type

Série : 4 ; 7 ; 8 ; 10 ; 11.

$\bar{x} = 40 \div 5 =$ **8** ; médiane : **8**
Écarts : −4, −1, 0, 2, 3
$V = (16 + 1 + 0 + 4 + 9) \div 5 =$ **6**
$\sigma = \sqrt{6} \approx$ **2,45**

Médiane et quartiles

Série de 8 valeurs : 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 14 ; 15.

Médiane : (8 + 9) ÷ 2 = **8,5**
Q_1 : 25 % × 8 = 2, soit la 2e valeur : **5**
Q_3 : 75 % × 8 = 6, soit la 6e valeur : **12**

L'ajustement affine d'un nuage de points

Une série à deux variables $(x_i ; y_i)$ se représente par un **nuage de points**. S'il a une forme allongée, on l'ajuste par une droite $y = ax + b$. La droite des **moindres carrés** a pour coefficient $a = \text{cov}(x, y) \div V(x)$, où cov(x, y) est la moyenne des produits $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$, et passe par le **point moyen** $G(\bar{x} ; \bar{y})$. Le coefficient de corrélation r, proche de 1 ou de −1, indique un bon ajustement.

Exemple : chiffre d'affaires d'une entreprise (en milliers d'euros)

Rang de l'année x : 1, 2, 3, 4, 5. Chiffre d'affaires y : 50, 54, 57, 61, 63.

$\bar{x} = 3$; $\bar{y} = 285 \div 5 = 57$: G(3 ; 57)
$\text{cov}(x, y) = [(-2)(-7) + (-1)(-3) + 0 + 1 \times 4 + 2 \times 6] \div 5 = 33 \div 5 = 6,6$
$V(x) = (4 + 1 + 0 + 1 + 4) \div 5 = 2$, donc $a = 6,6 \div 2 = 3,3$ et $b = 57 - 3,3 \times 3 = 47,1$
Droite : **y = 3,3x + 47,1**. Prévision pour l'année 7 : 3,3 × 7 + 47,1 = **70,2**

Le bon réflexe · Une prévision hors des données observées (extrapolation) suppose que la tendance se maintient : dites-le en une phrase dans votre conclusion.

Les pièges classiques

Calculer la médiane sans ranger la série : on ordonne d'abord les valeurs.

Prendre la moyenne simple d'un tableau d'effectifs : chaque valeur doit être pondérée par son effectif.

Confondre variance et écart-type : l'écart-type est la racine carrée de la variance, dans l'unité des données.

Présenter une prévision comme une certitude : un ajustement décrit une tendance passée.

Entraînez-vous : 5 QRC · calculs et raisonnement rédigés

1. Notes : 8, 12, 15, 10, 15. Calculez la moyenne, la médiane et l'étendue.

2. Dans une entreprise, 10 salariés gagnent 1 800 €, 6 gagnent 2 200 € et 4 gagnent 3 000 €. Calculez le salaire moyen.

3. Calculez la variance et l'écart-type de la série 2 ; 4 ; 6 ; 8.

4. Série ordonnée de 12 valeurs : 2 ; 3 ; 5 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 13 ; 15. Donnez la médiane, Q_1, Q_3 et l'écart interquartile.

5. La droite d'ajustement de y en x est y = 2,5x + 40 et le point moyen a pour abscisse 6. Donnez son ordonnée, puis estimez y pour x = 10.

Corrigés détaillés

1. Moyenne : 60 ÷ 5 = **12**. Série ordonnée : 8, 10, 12, 15, 15 ; médiane : **12**. Étendue : 15 − 8 = **7**.

2. Moyenne pondérée : (10 × 1 800 + 6 × 2 200 + 4 × 3 000) ÷ 20 = (18 000 + 13 200 + 12 000) ÷ 20 = 43 200 ÷ 20 = **2 160 €**.

3. Moyenne : 5. Écarts : −3, −1, 1, 3 ; carrés : 9, 1, 1, 9. V = 20 ÷ 4 = **5** ; $\sigma = \sqrt{5} \approx$ **2,24**.

4. Médiane : (7 + 8) ÷ 2 = **7,5**. Q_1 : 25 % × 12 = 3, soit la 3e valeur, **5**. Q_3 : 75 % × 12 = 9, soit la 9e valeur, **10**. Écart interquartile : **5**.

5. La droite passe par le point moyen : $\bar{y} = 2{,}5 \times 6 + 40 =$ **55**. Pour x = 10 : $y \approx 2{,}5 \times 10 + 40 =$ **65**, si la tendance observée se maintient.

Les formules à retenir

Variance	$V = (1/N)\ \Sigma\ n_i(x_i - \bar{x})^2$; $\sigma = \sqrt{V}$
Droite des moindres carrés	$a = \text{cov}(x, y) \div V(x)$; $b = \bar{y} - a\,\bar{x}$
Point moyen	$G(\bar{x} ; \bar{y})$, toujours sur la droite d'ajustement

Dénombrement et probabilités conditionnelles

Compter les issues, utiliser un arbre pondéré, la formule des probabilités totales et l'indépendance

Le vocabulaire. Une expérience aléatoire a des **issues** ; un **événement** est un ensemble d'issues. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. En situation d'**équiprobabilité**, $P(A)$ = nombre d'issues favorables ÷ nombre d'issues possibles.

Dénombrer

Situation	Nombre de possibilités	Exemple
Principe multiplicatif : k choix successifs indépendants	Produit des nombres de choix	Menu de 3 entrées, 4 plats : 12 menus
k éléments parmi n, ordre compté, répétition permise	n^k	Codes à 4 chiffres : $10^4 = 10\,000$
k éléments parmi n, ordre compté, sans répétition	$n \times (n-1) \times \ldots$ (k facteurs)	Codes à chiffres distincts : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$
Ranger n éléments	$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$	5 personnes en file : $5! = 120$
k éléments parmi n, sans ordre	$C(n, k) = n! \div (k!\,(n-k)!)$	Comité de 3 parmi 10 : 120

Probabilités conditionnelles et arbre pondéré

La probabilité de B **sachant** A est $P_A(B) = P(A \cap B) \div P(A)$. Dans un arbre : la somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1 ; la probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités de ses branches.

Formule des probabilités totales : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$.

Indépendance : A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, c'est-à-dire si $P_A(B) = P(B)$. Pour des épreuves indépendantes répétées, on multiplie les probabilités.

Exemple : un test de dépistage

2 % d'une population est malade. Le test est positif chez 95 % des malades et chez 3 % des personnes saines. On teste une personne au hasard.

$P(\text{positif}) = 0{,}02 \times 0{,}95 + 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}019 + 0{,}0294 = \mathbf{0{,}0484}$

$P_{\text{positif}}(\text{malade}) = 0{,}019 \div 0{,}0484 \approx \mathbf{0{,}39}$

Moins de 4 personnes positives sur 10 sont réellement malades : la maladie est rare

Le bon réflexe · Dès qu'un énoncé dit « parmi les… » ou « sachant que… », dessinez l'arbre : il rend visibles les probabilités conditionnelles et évite d'en oublier une branche.

Les pièges classiques

Confondre $P_A(B)$ et $P(A \cap B)$: la première se lit sur une branche, la seconde est le produit le long d'un chemin.

Confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$: inverser un conditionnement demande la formule $P(A \cap B) \div P(B)$.

Confondre incompatibles et indépendants : incompatibles signifie $P(A \cap B) = 0$; indépendants, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Calculer « au moins un » directement : passez par l'événement contraire, « aucun ».

Entraînez-vous : 5 QRC · calculs et raisonnement rédigés

1. Une urne contient 5 boules rouges et 3 vertes. On tire une boule, on la remet, puis on en tire une seconde. Calculez P(verte au 1er tirage) et P(deux rouges).

2. $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}5$; $P(A \cap B) = 0{,}2$. Calculez $P(A \cup B)$. A et B sont-ils indépendants ?

3. Une classe de 25 élèves élit 2 délégués. Combien de choix possibles ? Et si l'on élit un président et un secrétaire ?

4. La machine A fabrique 60 % des pièces, dont 2 % défectueuses ; la machine B le reste, dont 5 % défectueuses. Calculez P(D), puis la probabilité qu'une pièce défectueuse vienne de A.

5. On lance deux fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

Corrigés détaillés

1. $P(\text{verte}) = \mathbf{3/8}$. Les tirages avec remise sont indépendants : $P(\text{deux rouges}) = 5/8 \times 5/8 = \mathbf{25/64} \approx 0{,}39$.

2. $P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = \mathbf{0{,}7}$. $P(A) \times P(B) = 0{,}2 = P(A \cap B)$: A et B sont **indépendants**.

3. Deux délégués sans ordre : $C(25, 2) = 25 \times 24 \div 2 = \mathbf{300}$. Président puis secrétaire, l'ordre compte : $25 \times 24 = \mathbf{600}$.

4. $P(D) = 0{,}6 \times 0{,}02 + 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}012 + 0{,}02 = \mathbf{0{,}032}$. $P_D(A) = 0{,}012 \div 0{,}032 = \mathbf{0{,}375}$.

5. Événement contraire : aucun 6, de probabilité $(5/6)^2 = 25/36$. $P(\text{au moins un 6}) = 1 - 25/36 = \mathbf{11/36} \approx 0{,}31$.

Les formules à retenir

Probabilité conditionnelle	$P_A(B) = P(A \cap B) \div P(A)$
Probabilités totales	$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$
Combinaisons	$C(n, k) = n! \div (k!(n - k)!)$

Variables aléatoires et loi binomiale

Loi de probabilité, espérance, épreuve de Bernoulli et schéma de Bernoulli

Une variable aléatoire X associe un nombre à chaque issue d'une expérience (un gain, un nombre de succès). Sa **loi** est le tableau des valeurs x_i et de leurs probabilités p_i, dont la somme vaut 1.

L'espérance $E(X) = \Sigma\, x_i\, p_i$ est la valeur moyenne obtenue si l'on répète l'expérience un très grand nombre de fois. Un jeu est **équitable** si l'espérance du gain est nulle. **La variance** $V(X) = \Sigma\, p_i\, (x_i - E(X))^2$ et l'écart-type $\sigma = \sqrt{V}$ mesurent la dispersion.

Un jeu est-il équitable ?

On mise 2 €, puis on lance un dé : un 6 rapporte 10 €, un 5 rapporte 2 €, sinon rien. X est le gain net.

6 : $X = 10 - 2 = 8$, probabilité 1/6 · 5 : $X = 0$, probabilité 1/6 · autres : $X = -2$, probabilité 4/6
$E(X) = 8 \times 1/6 + 0 \times 1/6 - 2 \times 4/6 = 8/6 - 8/6 =$ **0** : le jeu est **équitable**

De l'épreuve de Bernoulli à la loi binomiale

Notion	Définition	Paramètres
Épreuve de Bernoulli	Expérience à deux issues : succès (probabilité p) ou échec (1 − p)	$E = p$; $V = p(1 - p)$
Schéma de Bernoulli	n répétitions **identiques et indépendantes** d'une épreuve de Bernoulli	n et p
Loi binomiale B(n ; p)	Loi de X, nombre de succès obtenus dans le schéma	$P(X = k) = C(n, k)\, p^k\, (1 - p)^{n-k}$
Espérance, variance	$E(X) = np$; $V(X) = np(1 - p)$	$\sigma = \sqrt{(np(1 - p))}$

Justifier une loi binomiale se fait toujours en trois points : on répète n fois la **même** épreuve à deux issues ; les répétitions sont **indépendantes** (tirages avec remise, ou dans une très grande population) ; X compte le **nombre de succès**. Puis on écrit : X suit la loi B(n ; p).

Répondre au hasard à un QCM

Un QCM de 4 questions a 4 propositions par question, une seule bonne. On répond au hasard ; X est le nombre de bonnes réponses.

X suit B(4 ; 0,25)
$P(X = 2) = C(4, 2) \times 0{,}25^2 \times 0{,}75^2 = 6 \times 0{,}0625 \times 0{,}5625 \approx$ **0,211**
$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}75^4 \approx$ **0,684** ; $E(X) = 4 \times 0{,}25 =$ **1** bonne réponse en moyenne

Le bon réflexe · Pour « au moins un succès », utilisez toujours $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$.

Les pièges classiques

Oublier de vérifier que la somme des probabilités vaut 1 : c'est souvent la clé pour trouver une probabilité manquante.

Appliquer la loi binomiale à des tirages sans remise dans une petite urne : les épreuves ne sont plus indépendantes.

Oublier le coefficient C(n, k) : il compte les façons de placer les k succès parmi les n épreuves.

Confondre gain et gain net : on retire la mise du gain obtenu avant de calculer l'espérance.

Entraînez-vous : 5 QRC · calculs et raisonnement rédigés

1. X prend les valeurs −5, 0 et 10 avec les probabilités 0,5 ; 0,3 et 0,2. Calculez E(X) et interprétez.

2. X prend les valeurs 1, 2 et 3 avec les probabilités 0,2 ; 0,5 et p. Trouvez p, puis E(X).

3. X suit B(5 ; 0,3). Calculez P(X = 0) et P(X ≥ 1).

4. X suit B(20 ; 0,1). Donnez son espérance et sa variance.

5. X suit B(3 ; 0,4). Calculez P(X = 2).

Corrigés détaillés

1. $E(X) = -5 \times 0{,}5 + 0 \times 0{,}3 + 10 \times 0{,}2 = -2{,}5 + 2 =$ **−0,5**. Sur un grand nombre de parties, on perd en moyenne 0,50 € par partie : le jeu est **défavorable** au joueur.

2. La somme vaut 1 : $p = 1 - 0{,}2 - 0{,}5 =$ **0,3**. $E(X) = 1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}5 + 3 \times 0{,}3 = 0{,}2 + 1 + 0{,}9 =$ **2,1**.

3. $P(X = 0) = 0{,}7^5 \approx$ **0,168**. $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}168 =$ **0,832** environ.

4. $E(X) = 20 \times 0{,}1 =$ **2** ; $V(X) = 20 \times 0{,}1 \times 0{,}9 =$ **1,8**.

5. $C(3, 2) = 3$. $P(X = 2) = 3 \times 0{,}4^2 \times 0{,}6 = 3 \times 0{,}16 \times 0{,}6 =$ **0,288**.

Les formules à retenir

Espérance	$E(X) = \Sigma\, x_i\, p_i$
Loi binomiale	$P(X = k) = C(n, k)\, p^k (1 - p)^{n-k}$; $E = np$; $V = np(1 - p)$
Au moins un succès	$P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$

Suites arithmétiques et géométriques

Terme général, récurrence, sommes de termes, variations et applications financières

Une suite (u_n) associe un nombre à chaque entier n. Elle peut être définie **explicitement** ($u_n = 3n + 2$: on calcule directement u_{10}) ou **par récurrence** ($u_{n+1} = u_n + 4$ et $u_0 = 1$: chaque terme se calcule à partir du précédent).

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$: on **ajoute** toujours r	$u_{n+1} = q \times u_n$: on **multiplie** toujours par q
Terme général	$u_n = u_0 + n\,r = u_p + (n - p)\,r$	$u_n = u_0 \times q^n = u_p \times q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs	Nombre de termes × (premier + dernier) ÷ 2	Premier terme × $(1 - q^{\text{nombre de termes}}) \div (1 - q)$, si $q \neq 1$
Somme de référence	$1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1) \div 2$	$1 + q + \ldots + q^n = (1 - q^{n+1}) \div (1 - q)$
Variations	Croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$	Si $u_0 > 0$: croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$
Reconnaître	$u_{n+1} - u_n$ est constant	$u_{n+1} \div u_n$ est constant (termes non nuls)

Le lien avec les pourcentages. Une hausse de t % chaque période multiplie par $q = 1 + t/100$: c'est une suite géométrique. Une baisse de t % multiplie par $1 - t/100$. Une augmentation d'un même montant chaque période donne une suite arithmétique.

Intérêts simples

1 000 € placés à 3 % d'intérêts simples par an.

On ajoute 30 € par an : $C_n = 1\,000 + 30n$
Au bout de 5 ans : **1 150 €**

Intérêts composés

1 000 € placés à 3 % d'intérêts composés par an.

On multiplie par 1,03 : $C_n = 1\,000 \times 1{,}03^n$
Au bout de 5 ans : $1\,000 \times 1{,}03^5 \approx$ **1 159,27 €**

Somme de termes d'une suite arithmétique

$u_0 = 5$ et $r = 3$. Calculer u_{10} et $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

$u_{10} = 5 + 10 \times 3 =$ **35**
De u_0 à u_{10}, il y a 11 termes : $S = 11 \times (5 + 35) \div 2 =$ **220**

Le bon réflexe · Avant d'appliquer une formule de somme, comptez les termes : de u_0 à u_n, il y en a $n + 1$; de u_1 à u_n, il y en a n.

Les pièges classiques

Mal compter les termes : de u_0 à u_{10}, il y a 11 termes, pas 10.

Confondre hausse de t % et ajout de t : + 3 % par an est géométrique (× 1,03), + 30 € par an est arithmétique.

Écrire $u_n = u_1 + n\,r$: si le premier terme est u_1, la formule devient $u_n = u_1 + (n - 1)\,r$.

Appliquer la somme géométrique avec q = 1 : la suite est alors constante ; la somme vaut nombre de termes × u_0.

Entraînez-vous : 5 QRC · calculs et raisonnement rédigés

1. (u_n) est arithmétique, de premier terme $u_0 = 12$ et de raison −2,5. Calculez u_8 et $u_0 + \ldots + u_8$.

2. (v_n) est géométrique, avec $v_0 = 3$ et $q = 2$. Calculez v_6 et $v_0 + \ldots + v_6$.

3. Une commune de 20 000 habitants perd 2 % de sa population chaque année. Exprimez P_n et estimez la population dans 3 ans.

4. Calculez 1 + 2 + 3 + ... + 100.

5. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 4$. Donnez la nature de la suite, son terme général, puis le rang n tel que $u_n = 81$.

Corrigés détaillés

1. $u_8 = 12 + 8 \times (-2{,}5) =$ **−8**. Il y a 9 termes : $S = 9 \times (12 + (-8)) \div 2 = 9 \times 2 =$ **18**.

2. $v_6 = 3 \times 2^6 =$ **192**. 7 termes : $S = 3 \times (1 - 2^7) \div (1 - 2) = 3 \times 127 =$ **381**.

3. Baisser de 2 % revient à multiplier par 0,98 : (P_n) est géométrique, $\mathbf{P_n = 20\,000 \times 0{,}98^n}$. $P_3 = 20\,000 \times 0{,}98^3 \approx$ **18 824 habitants**.

4. Somme des n premiers entiers : $100 \times 101 \div 2 =$ **5 050**.

5. On ajoute 4 à chaque étape : suite **arithmétique** de raison 4. $u_n = 1 + 4n$. $1 + 4n = 81$ donne $4n = 80$, soit **n = 20**.

Les formules à retenir

Arithmétique	$u_n = u_0 + nr$; S = nb de termes × (premier + dernier) ÷ 2
Géométrique	$u_n = u_0\,q^n$; $S = \text{premier} \times (1 - q^{\text{nb de termes}}) \div (1 - q)$
Évolution de t %	Coefficient multiplicateur $q = 1 \pm t/100$

Le sujet 2026 corrigé

Suite récurrente, probabilités sur deux jeux, inéquations

Le sujet 2026. Trois exercices « dans l'ordre de votre choix » : une suite définie par récurrence, deux jeux de hasard, trois inéquations. Chaque question attend une justification écrite : un résultat seul rapporte peu.

Exercice 1 · La suite définie par $u_{n+1} = (3/4)\,u_n - 1/2$ et $u_0 = 1$

1) $u_1 = (3/4) \times 1 - 1/2 =$ **1/4** ; $u_2 = (3/4) \times (1/4) - 1/2 = 3/16 - 8/16 =$ **−5/16** ; $u_3 = (3/4) \times (-5/16) - 1/2 = -15/64 - 32/64 =$ **−47/64**.

2) Décroissance. $u_{n+1} - u_n = (3/4)\,u_n - 1/2 - u_n = -(u_n + 2) \div 4$. Il suffit donc de montrer que $u_n > -2$ pour tout n, par récurrence.
Initialisation : $u_0 = 1 > -2$. Hérédité : si $u_n > -2$, alors $(3/4)\,u_n > -3/2$, donc $u_{n+1} > -3/2 - 1/2 = -2$.
Conclusion : $u_n + 2 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite est **strictement décroissante**.

3) Convergence. La suite est décroissante et minorée par −2 : elle **converge**. Sa limite ℓ vérifie $\ell = (3/4)\,\ell - 1/2$, soit $\ell = -2$. On peut le confirmer : $v_n = u_n + 2$ est géométrique de raison 3/4 et de premier terme 3, donc $u_n = 3 \times (3/4)^n - 2$, qui tend vers −2.

Fiche MQ10. Le schéma « décroissante et minorée, donc convergente » revient dans les deux sujets.

Exercice 3 · Résoudre trois inéquations

a) $4x^2 > 3x + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 > 0$. $\Delta = 9 + 16 = 25$; racines $(3 - 5)/8 = -1/4$ et $(3 + 5)/8 = 1$. Le trinôme est du signe de a = 4, positif à l'extérieur des racines : **S =]−∞ ; −1/4[∪]1 ; +∞[**.

b) Sur $[0 ; +\infty[$, $(4x^2 - 12x + 9) / (2x^2 - x - 3) > 0$. Le numérateur vaut $(2x - 3)^2$; le dénominateur $(2x - 3)(x + 1)$. Pour $x \neq 3/2$, le quotient vaut $(2x - 3)/(x + 1)$. Sur $[0 ; +\infty[$, $x + 1 > 0$: il faut $2x - 3 > 0$, soit $x > 3/2$. **S =]3/2 ; +∞[**.

c) Dans $\mathbb{R}$, $x \neq 1$. $(x^2 - 1)/(x - 1)^2 = (x + 1)/(x - 1)$. L'inéquation devient $(x + 1)/(x - 1) + 1 + 4/(x - 1) \geq 0$, soit $(2x + 4)/(x - 1) \geq 0$. Tableau de signes : $2x + 4$ s'annule en −2, $x - 1$ en 1 (valeur interdite). **S =]−∞ ; −2] ∪]1 ; +∞[**.

Fiche MQ4 : on ramène tout d'un même côté, on factorise, puis tableau de signes. Les valeurs interdites sont toujours exclues.

Exercice 2 · Jeu n° 1 : un dé à 6 faces, puis une carte parmi A, B, C, D

1) Nombre d'issues : 6 × 4 = **24**, toutes équiprobables.
2) « Dé ≥ 3 puis carte B » : 4 faces sur 6, puis 1 carte sur 4. P = (4/6) × (1/4) = 4/24 = **1/6**.
3a) « Dé ≤ 3 puis carte A ou B » : P = (3/6) × (2/4) = **1/4**. **3b)** Perdre est l'événement contraire : P = 1 − 1/4 = **3/4**.

Expériences indépendantes : on multiplie les probabilités, ou on compte les issues favorables parmi les 24.

Exercice 2 · Jeu n° 2 : deux dés lancés ensemble (a pour le premier, b pour le second)

On compte 6 × 6 = **36** couples (a ; b) équiprobables.
1) Un couple précis (a ; b) : P = **1/36**.
2) Un double (a ; a) : 6 couples, P = 6/36 = **1/6**.
3) b > a : on retire les 6 doubles et on partage le reste en deux moitiés symétriques, (36 − 6)/2 = 15 couples, P = 15/36 = **5/12**.
4) a > b : par symétrie, P = **5/12**.
5) 1/6 + 5/12 + 5/12 = 2/12 + 5/12 + 5/12 = **1** : les trois événements sont incompatibles et couvrent toutes les issues (a = b, a < b ou a > b).

Fiche MQ8. Une somme de probabilités égale à 1 permet de vérifier ses résultats.

Ce que montre le sujet · Pas de piège, mais une exigence de rédaction : annoncer l'outil (« par récurrence », « par symétrie », « événement contraire »), poser le calcul, conclure par une phrase. Révisez en priorité les fiches MQ4, MQ8 et MQ10.

Entraînez-vous sur le même modèle

1) $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 1$. Montrez que la suite est décroissante et convergente.
2) Résolvez dans $\mathbb{R}$: $(x - 3)/(x + 2) \leq 0$.
3) On lance deux dés équilibrés. Probabilité que la somme fasse 7 ?

1. $u_{n+1} - u_n = -(u_n - 2)/2$; par récurrence $u_n > 2$, donc la suite décroît ; minorée par 2, elle converge, vers $\ell = 0{,}5\ell + 1$, soit **$\ell = 2$**. 2. Tableau de signes, −2 interdit : **S =]−2 ; 3]**. 3. Six couples : (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1), soit **6/36 = 1/6**.

Le sujet zéro corrigé

Fonction rationnelle, suite étudiée par récurrence, arbre pondéré

Le sujet zéro comportait lui aussi trois exercices : une fonction rationnelle, une suite à étudier par récurrence, un arbre pondéré.

Exercice 1 · f(x) = x / (x² + 2x − 3) : ensemble de définition, dérivée, variations

1) Le dénominateur s'annule pour $x^2 + 2x - 3 = 0$: $\Delta = 4 + 12 = 16$, racines −3 et 1. **$D =]-\infty ; -3[\cup]-3 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$**.

2) f = u/v avec u = x, u′ = 1, $v = x^2 + 2x - 3$, v′ = 2x + 2. $f' = (u'v - uv')/v^2 = [(x^2 + 2x - 3) - x(2x + 2)] / v^2 =$ **$(-x^2 - 3) / (x^2 + 2x - 3)^2$**.

3) Le dénominateur est un carré, strictement positif sur D. Le numérateur $-x^2 - 3$ est toujours strictement négatif. Donc $f'(x) < 0$: f est **strictement décroissante sur chacun des trois intervalles** $]-\infty ; -3[$, $]-3 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.

Attention : on ne dit pas « décroissante sur D », car D n'est pas un intervalle. Fiches MQ5 et MQ6.

Exercice 3 · Enceintes : fournisseurs C1 (30 %), C2 (25 %), C3 (le reste) ; blanches : 25 %, 35 %, 55 %

C3 fournit 100 − 30 − 25 = 45 %. L'arbre pondéré a trois branches (C1, C2, C3), puis deux (B, N) : $P_{C1}(N) = 0{,}75$; $P_{C2}(N) = 0{,}65$; $P_{C3}(N) = 0{,}45$.

Formule des probabilités totales : $P(N) = 0{,}30 \times 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}65 + 0{,}45 \times 0{,}45 = 0{,}225 + 0{,}1625 + 0{,}2025 =$ **0,59**.

Dessinez l'arbre complet, avec toutes les probabilités : il fait partie des points attendus. Fiche MQ8.

Pour aller plus loin

1) Étudiez les variations de $g(x) = (2x + 1)/(x - 1)$. **2)** Dans l'exercice 3, l'enceinte choisie est blanche : quelle est la probabilité qu'elle vienne de C3 ?

1. D = $\mathbb{R}$ privé de 1 ; $g'(x) = [2(x - 1) - (2x + 1)]/(x - 1)^2 =$ **$-3/(x - 1)^2$** < 0 : g est décroissante sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$. **2.** $P(B) = 1 - 0{,}59 = 0{,}41$; $P_B(C3) = P(C3 \cap B)/P(B) = (0{,}45 \times 0{,}55)/0{,}41 \approx$ **0,60**.

Exercice 2 · La suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = (1 + 3u_n) / (3 + u_n)$

1) Montrer que $u_{n+1} = 3 - 8/(3 + u_n)$. On part du membre de droite : $3 - 8/(3 + u_n) = [3(3 + u_n) - 8] / (3 + u_n) = (1 + 3u_n) / (3 + u_n) = u_{n+1}$.

2) Montrer par récurrence que $1 < u_n \leq 2$. Initialisation : $u_0 = 2$. Hérédité : si $1 < u_n \leq 2$, alors $4 < 3 + u_n \leq 5$; la fonction inverse étant décroissante sur $]0 ; +\infty[$, $1/5 \leq 1/(3 + u_n) < 1/4$; donc $8/5 \leq 8/(3 + u_n) < 2$, puis $1 < 3 - 8/(3 + u_n) \leq 7/5 \leq 2$. La propriété est vraie au rang $n + 1$, donc pour tout n.

3) Sens de variation. $u_{n+1} - u_n = [(1 + 3u_n) - u_n(3 + u_n)] / (3 + u_n) = (1 - u_n^2) / (3 + u_n) = (1 - u_n)(1 + u_n) / (3 + u_n)$. Comme $u_n > 1$: $1 - u_n < 0$, les autres facteurs sont positifs. Donc $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite est **décroissante**.

4) Convergence. Décroissante et minorée par 1, la suite **converge**. Sa limite ℓ vérifie $\ell = (1 + 3\ell)/(3 + \ell)$, soit $\ell^2 = 1$, donc $\ell = 1$ (car $\ell \geq 1$).

La rédaction d'une récurrence suit toujours trois temps : initialisation, hérédité, conclusion. Fiche MQ10.

Ce que montrent les deux sujets · Les mêmes compétences reviennent : étude de signe et tableau de variation, suites étudiées par récurrence, probabilités avec arbre ou dénombrement, inéquations. Entraînez-vous à les rédiger entièrement, sans calculatrice pour les calculs simples.

Les erreurs qui coûtent des points

Conclure sans justifier (« la suite converge ») : il faut citer le théorème, décroissante et minorée. **Oublier les valeurs interdites** d'un quotient, dans l'ensemble de définition comme dans les solutions. **Écrire « f décroissante sur D »** quand D est une réunion d'intervalles. **Oublier l'initialisation** d'une récurrence. **Donner une probabilité sans l'arbre** ou sans le dénombrement qui la justifie.

FIN DU PACK · MATHÉMATIQUES

Et maintenant, à vous !

Relisez les pièges de chaque fiche, refaites les questions ratées quelques jours plus tard, puis entraînez-vous sur les sujets officiels en temps réel. La régularité compte plus que la durée : un peu chaque jour vaut mieux qu'une longue séance la veille.

LE JOUR J : LA LISTE À COCHER

- ☐ **Votre convocation.** Imprimée, avec l'adresse exacte du centre d'examen. Repérez le trajet la veille.
- ☐ **Une pièce d'identité.** En cours de validité : sans elle, l'accès à la salle peut être refusé.
- ☐ **Le matériel autorisé.** Stylos à encre noire ou bleue, de rechange. Vérifiez sur la convocation si la calculatrice est admise.
- ☐ **Une montre.** Pour suivre votre plan : 45 minutes pour le QCM, 1 h 15 pour les QRC.

LA COLLECTION COMPLÈTE

Le tronc commun AD, QCM et oral réunis	**Analyse de dossier** Épreuve écrite n° 1	**Connaissances générales** QCM de l'épreuve n° 2
Français QCM de l'épreuve n° 2	**Mathématiques et raisonnement logique** QCM de l'épreuve n° 2	**Sciences économiques et sociales** Option QRC
Comptabilité et analyse financière Option QRC	**Droit** Option QRC	**Mathématiques** Option QRC
Histoire, géographie, géopolitique Option QRC	**Oral d'admission** Épreuve d'admission	

UNE ERREUR, UNE QUESTION ?

Si vous repérez une erreur ou un point à préciser, écrivez à **contact@lessentiel-concours.fr** : chaque signalement améliore la prochaine version.

PARTAGEZ-LE

Ce document est gratuit. Vous pouvez le transmettre librement à d'autres candidats, sans le modifier ni le vendre (licence CC BY-NC-ND 4.0).

L'Essentiel Concours

Ici... on va à l'essentiel. Bon courage !
Initiative indépendante : ce document n'est pas une publication officielle de la DGFiP.